**КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ**

(продолжение лекции)

**Знакоопределенность квадратичных форм. Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичных форм.**

***Определение.*** Квадратичная форма  называется *положительно определенной*, если  для любого , и *отрицательно* *определенной*, если  для любого . Матрица *А* квадратичной формы  называется *положительно определенной* (*отрицательно* *определенной*), если  положительно определена (отрицательно определена). Положительно и отрицательно определенныеквадратичные формы называются *знакоопределенными*.

Квадратичная форма  называется *неотрицательно определенной* (*неположительно определенной*), если  (),.

***Теорема*.** Для того, чтобы квадратичная форма  была *положительно определенной* (*отрицательно определенной*), необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения ее матрицы *А* были положительными (отрицательными).

***Следствие.*** Определитель матрицы положительно определенной квадратичной формы больше нуля.

***Определение.*** *Главными минорами матрицы* *А* квадратичной формы  называются определители

, т. е миноры, стоящие в левом верхнем углу матрицы *А*.

Имеет место следующий критерий *знакоопределенности квадратичных форм.*

***Теорема (Критерий Сильвестра).*** Для того, чтобы квадратичная форма  была *положительно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры ее матрицы *А* были положительными, т. е.

. (7)

Для того, чтобы квадратичная форма  была *отрицательно определенной*, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры нечетного порядка ее матрицы были отрицательными, а четного порядка – положительными, т. е.

. (8)

***Пример.*** Исследовать назнакоопределенность квадратичную форму:

а) ;

б) .

*Решение.* ► Составляем матрицы этих квадратичных форм:

а) , б) .

Так как в пункте а) , то по критерию Сильвестра заключаем, что квадратичная форма положительно определена.

В пункте б) следовательно квадратичная форма является знаконеопределенной. ◄

Квадратичные формы находят широкое применение при упрощении уравнений кривых и поверхностей второго порядка на плоскости и в пространстве соответственно.

Известно, что общее уравнение кривой второго порядка в базисе  имеет вид

. (9)

Его первые три слагаемые образуют квадратичную форму  с матрицей . Поэтому задача о приведении кривой (9) к каноническому виду сводится к задаче о приведении к этому виду квадратичной формы  этой кривой.

Процесс исследования уравнения кривой (9) рассмотрим на следующем примере.

***Пример*.** Привести к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

. (10)

*Решение.* ► Квадратичная форма кривой имеет вид: , а матрицей этой квадратичной формы является

.

Составим характеристическое уравнение матрицы  и найдем его корни:

.

Далее найдем собственные векторы из системы уравнений



полагая вначале , а затем .

При  имеем

.

Полагая , получим собственный вектор , соответствующий собственному значению .

При  имеем

.

Полагая , получим собственный вектор . Нормируем собственные векторы  и  : . Следовательно, 

Составляем матрицу *T* перехода от старого базиса  к новому :  Столбцами этой матрицы являются координаты нормированных собственных векторов 

Выполним в уравнении (10) переход от координат  к новым координатам  по формулам

.

В результате получим:

,

или

.

Далее выполним параллельный перенос системы координат, определяемый соотношениями



В результате получим уравнение

.

Последнее уравнение есть каноническое уравнение эллипса. ◄